数学分析报告
Γ 函数的定义与性质探究

XenonWZH

2025 年 6 月 26 日

摘要

本文通过探究 Γ 函数的定义与性质, 说明了其作为阶乘函数在实数域上延拓的合理性. 首先介绍 Γ 函数的定义及两种等价形式, 包括 Weierstrass 的定义及基于广义积分的形式. 接着推导了 Γ 函数的性质：非负性, 递推性质, $\log\Gamma(x)$ 的凸性和可导性. 然后推导了 Γ 函数的余元公式和倍元公式, 给出了计算其非整点的值的方案. 最后, 通过证明 Γ 函数在特定条件下的唯一性, 进一步确立了其作为阶乘函数延拓的合理性.

关键词: 数学分析; Γ 函数; 函数项级数

目录

1 问题陈述 **3**

2 内容分析 **3**

2.1 等价形式证明 3

2.1.1 Weierstrass 提出的定义 3

2.1.2 基于广义积分的形式 4

2.2 性质探究 4

2.2.1 非负性 4

2.2.2 递推性质 5

2.2.3 凸函数性质 6

2.2.4 可导性 6

2.2.5 余元公式 7

2.2.6 倍元公式 8

2.3 唯一性证明 9

3 总结 **11**

1 问题陈述

我们知道 Γ 函数有定义

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x},\quad \forall x\notin\mathbb{Z}_{\le 0}. \tag{1}$$

该定义很好地体现了其为阶乘函数在 $\mathbb{R}$ 的延拓, 即 $\Gamma(x)$ 在定义域上连续, 且满足 $\Gamma(x)=(x-1)!,\ x\in\mathbb{Z}_{>0}$.

在此, 我们将进一步探究该函数的性质, 说明其为阶乘函数延拓的合理性, 并证明其的等价形式以解决原本定义难以解决的问题.

2 内容分析

2.1 等价形式证明

我们已经知道了由 Euler 提出的 Γ 函数的定义, 即式 (1). 实际上, 该函数有以下等价形式.

2.1.1 Weierstrass 提出的定义

定义 2.1. *定义 Γ 函数*

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},\quad \forall x\notin\mathbb{Z}_{\le 0}. \tag{2}$$

其中 γ 为欧拉常数.

证明. 有欧拉常数定义

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log n\right).$$

于是有

$$\log n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\gamma+o(1),\quad n\to\infty.$$

带入 (1) 有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x} \\
&= x\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-x} \\
&= x\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= x\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}n^{-x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= x\lim_{n\to\infty}\exp(-x\log n)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= x\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{i}+\gamma x+o(1)\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= x\lim_{n\to\infty}e^{o(1)}e^{\gamma x}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) \\
&= x\lim_{n\to\infty}e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \\
&= xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.
\end{aligned}
$$

□

2.1.2 基于广义积分的形式

命题 2.2. *Γ 函数满足*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x, \quad \forall s>0. \tag{3}$$

证明见 [1, 308 页].

需要注意该等价形式不能作为 Γ 函数的定义. 该形式的定义域为 $\mathbb{R}_{>0}$, 与 Γ 函数的定义域 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\le 0}$ 不同.

2.2 性质探究

通过 $\Gamma(x)$ 的定义, 我们可推出以下性质.

2.2.1 非负性

命题 2.3. *对任意的 $x\in\mathbb{R}_{>0}$, 均有 $\Gamma(x)>0$. 且 $\Gamma(1)=1$.*

证明. $\Gamma(x) > 0$ 可由 (1) 直接得出. 且有

$$\frac{1}{\Gamma(1)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1.$$

故 $\Gamma(1) = 1$. □

利用该性质和以下提到的递推性质, 我们不难推出对任意的 $x \in \mathbb{Z}_{>0}$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= (x-1)\Gamma(x-1)\\ &= (x-1)(x-2)\Gamma(x-2)\\ &= (x-1)(x-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1)\\ &= (x-1)!.\end{aligned}$$

即说明了 $\Gamma(x)$ 在 $\mathbb{Z}_{>0}$ 的限制为 $(x-1)!$.

2.2.2 递推性质

命题 2.4. 对任意的 $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, 均有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

证明. 令

$$\Pi(x) = x\Gamma(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}.$$

即证 $\Pi(x+1) = (x+1)\Pi(x)$. 有

$$\begin{aligned}\Pi(x+1) &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x+1}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x+1}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{x+k}{x+k+1}\right)\\ &= \Pi(x)\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{x+k}{x+k+1}\\ &= \Pi(x)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(x+1)}{x+n+1}\\ &= \Pi(x)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(x+1)-n(x+1)}{(x+n+1)-(x+n)}\\ &= (x+1)\Pi(x).\end{aligned}$$

□

该性质与阶乘函数性质 $(x+1)! = (x+1)x!$ 对应, 且在更大的定义域 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 成立, 进一步说明了其为阶乘函数的延拓的合理性.

2.2.3 凸函数性质

命题 2.5. $\log\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明. 由 (2) 得

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x) &= -\left(\log x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) - \log x - \gamma x.\end{aligned}$$

设 $x \in [a,b] \subseteq (0,+\infty)$, 有 $\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right) > 0$, 且

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) &< \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{n} - \log\left(1+\frac{b}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{n} - \frac{b}{n} + \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{b^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= O(1).\end{aligned}$$

故该函数项级数内闭一致收敛. 求导得

$$(\log\Gamma(x))' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) - \frac{1}{x} - \gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) - \frac{1}{x} - \gamma.$$

设 $x \in [a,b] \subseteq (0,+\infty)$, 有 $\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} > 0$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+[b]+1}\right) = \sum_{k=1}^{[b]+1}\frac{1}{k} = O(1).$$

故该函数项级数内闭一致收敛. 再次求导得

$$(\log\Gamma(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{x^2} > 0. \tag{4}$$

故 $\log\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. □

2.2.4 可导性

命题 2.6. $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 任意阶可导.

证明. 由 (4) 得 $(\log\Gamma(x))''$ 为幂级数和初等函数的和, 则 $(\log\Gamma(x))''$ 在 $(0,+\infty)$ 任意阶可导, 即 $\log\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 任意阶可导.

则 $\Gamma(x) = \exp(\log\Gamma(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 任意阶可导. □

2.2.5 余元公式

定理 2.7. 设 $x \notin \mathbb{Z}$, 有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

证明. 由 [2, 习题 18.3 第 9 题] 知, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 均有

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

于是原命题即为

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

由 (1) 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \cdot (1-x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1-x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x-1} \\
&= x(1-x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{1-x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= x(1-x) \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+x}{k} \cdot \frac{k+1-x}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \\
&= x \lim_{n\to\infty} \frac{1-x}{1} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+x}{k} \cdot \frac{k+1-x}{k+1} \\
&= x \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-x}{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+x}{k} \cdot \frac{k-x}{k} \\
&= x \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-x}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2-x^2}{k^2} \\
&= x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\
&= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

□

利用此公式我们可以计算 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值. 带入 $x = \frac{1}{2}$ 有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}.$$

即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi.$$

由 $\Gamma(x)$ 的非负性得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 利用递推性质可求出更多非整点的值.

2.2.6 倍元公式

定理 2.8. 设 $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, 有

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\cdot\Gamma(2x).$$

证明. 有 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, 则原式即为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{2x-1}}{\Gamma(2x)}.$$

由 (2) 得

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} &= \frac{xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{\gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x+\frac{1}{2}}{n}\right)e^{-\frac{x+\frac{1}{2}}{n}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{\gamma}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}} \\
&= x(2x+1)e^{2\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{2x+1}{2n}\right)e^{-\frac{2x+1}{2n}}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}} \\
&= x(2x+1)e^{2\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\left(1+\frac{2x+1}{2n}\right)\cdot\frac{2n}{2n+1}\right]e^{-\frac{2x}{n}} \\
&= x(2x+1)e^{2\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{2n+1}\right)e^{-\frac{2x}{n}} \\
&= x(2x+1)e^{2\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2x}{2n}\right)e^{-\frac{2x}{2n}}\left(1+\frac{2x}{2n+1}\right)e^{-\frac{2x}{2n+1}}\cdot e^{-2x\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)} \\
&= x(2x+1)\left[e^{2\gamma x}\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)e^{-\frac{2x}{n}}\right]\prod_{n=1}^{\infty}e^{-2x\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)} \\
&= \frac{e^{2x}}{2}\left[2xe^{2\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)e^{-\frac{2x}{n}}\right]\prod_{n=1}^{\infty}e^{-2x\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)} \\
&= \frac{e^{2x}}{2\Gamma(2x)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-2x\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)} \\
&= \frac{e^{2x}}{2\Gamma(2x)}\exp\left[-2x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\right].
\end{aligned}$$

又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\log 2$$

故

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{e^{2x}}{2\Gamma(2x)}e^{-2x(1-\log 2)}=\frac{2^{2x-1}}{\Gamma(2x)}.$$

□

2.3 唯一性证明

我们可以证明以下事实.

定理 2.9. 对于 $f\colon \mathbb{R}_{>0}$, 若其满足:

1. 对任意的 $x>0$, 均有 $f(x)>0$. 且 $f(1)=1$;
2. $f(x+1)=xf(x)$;
3. $\log f(x)$ 是凸函数.

则 $f(x)$ 唯一且为 $\Gamma(x)$.

证明. 不难验证 $\Gamma(x)$ 满足上述条件. 故只需证若有函数 $f(x)$ 满足上述条件, 则有 $f(x)=\Gamma(x)$.

由条件 2 得, 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, 有

$$\begin{aligned} g(n+1) &= \log f(n+1) \\ &= \log(nf(n)) \\ &= \log(n\cdot(n-1)\cdot f(n-1)) \\ &= \cdots = \log(n(n-1)\cdots 1\cdot f(1)) \\ &= \log(n!). \end{aligned}$$

且有 $g(1)=\log f(1)=\log 1=\log(0!)$ 满足上述等式. 则对 $x\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned} g(x+n+1) &= \log f(x+n+1) \\ &= \log((x+n)f(x+n)) \\ &= \cdots = \log((x+n)(x+n-1)\cdots xf(x)) \\ &= \log f(x)+\log(x(x+1)\cdots(x+n)) \\ &= g(x)+\log(x(x+1)\cdots(x+n)). \end{aligned}$$

又有 $n < n+1 < n+x+1 < n+2$, 则由条件 3 得

$$\begin{aligned}
&\frac{g(n+1)-g(n)}{n+1-n} \leq \frac{g(n+x+1)-g(n+1)}{n+x+1-(n+1)} \leq \frac{g(n+2)-g(n+1)}{n+2-(n+1)} \\
\iff& \log(n!) - \log((n-1)!) \leq \frac{g(n+x+1)-\log(n!)}{x} \leq \log((n+1)!) - \log(n!) \\
\iff& \log n \leq \frac{g(n+x+1)-\log(n!)}{x} \leq \log(n+1) \\
\iff& x\log n \leq g(n+x+1) - \log(n!) \leq x\log(n+1) \\
\iff& x\log n + \log(n!) \leq g(n+x+1) \leq x\log(n+1) + \log(n!) \\
\iff& \log(n^x n!) \leq g(x) + \log(x(x+1)\cdots(x+n)) \leq \log((n+1)^x n!) \\
\iff& \log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq g(x) \leq \log\frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.
\end{aligned}$$

对于右式, 有

$$\begin{aligned}
\log\frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \log\left[\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right] \\
&= \log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} + x\log\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

有 $\lim_{n\to\infty} x\log(1+\frac{1}{n}) = 0$. 故若 $\lim_{n\to\infty}\log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ 存在, 由极限保序性知

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

则对于 $x \in (0,1)$, 有

$$f(x) = e^{g(x)} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

又由 (1) 得

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{x+k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^x \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^x n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.
\end{aligned}$$

故当 $x \in (0,1)$ 时有 $f(x) = \Gamma(x)$. 又有 $f(1) = \Gamma(1) = 1$, 故当 $x \in (0,1]$ 时有 $f(x) = \Gamma(x)$. 则由条件 2 得, 对任意的 $x \in \mathbb{R}_{>0}$, 均有 $f(x) = \Gamma(x)$. □

此定理进一步说明了 $\Gamma(x)$ 作为阶乘函数在实数集的延拓的合理性, 且通过唯一性说明了其为延拓的 "唯一选项".

3 总结

综上, 我们得到了 Γ 函数的一些性质, 并论证了其唯一性. 在此, 我们看到了 Γ 作为阶乘函数在实数集延拓的合理性. 通过 Γ 函数及其等价形式, 我们可以解决更多广义积分和函数项级数的问题, 使问题解答更简洁直观. 通过函数性质, 余元公式和倍元公式, 我们可计算 Γ 函数在非整点的值. 同时, Γ 函数本身的性质也说明了其为形态优秀的函数, 可作为例子和有力工具供后续学习使用.

参考文献

[1] 陆亚明. *数学分析入门 (上册)* [M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.

[2] 陆亚明. *数学分析入门 (下册)* [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.